EJERCICIOS
TEORÍA DE EMPAREJAMIENTOS

PROFESOR: JUAN PABLO TORRES-MARTÍNEZ

Ejercicio 1

En el contexto de emparejamientos bilaterales uno-a-uno entre miembros de dos grupos M y W, los cuales tienen preferencias estrictas por los miembros del otro grupo:

(a) Demuestre que todo emparejamiento estable es eficiente. De un ejemplo que muestre que no todo emparejamiento eficiente es estable.

(b) Asuma que todos los miembros de un grupo, M o W, tienen las mismas preferencias, aunque no necesariamente todos los individuos del otro grupo son aceptables. Caracterice el conjunto de emparejamientos estables.

Ejercicio 2

Considere un modelo bilateral uno-a-uno con dos grupos de agentes $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ y $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$. Suponga que las preferencias son estrictas y cada individuo $h \in A \cup B$ considera a todos los agentes del grupo contrario aceptables. Dados emparejamientos estables μ_1 y μ_2, considere el emparejamiento η que junta a cada $a \in A$ con su mejor alternativa entre $\mu_1(a)$ y $\mu_2(a)$. Demuestre que η es estable.

Ejercicio 3

En el contexto de emparejamientos bilaterales uno-a-uno y preferencias estrictas:

(i) Si comenzamos de un matching inestable y permitimos que se vayan generando bloqueos de forma secuencial, uno de cada vez, ¿siempre llegamos a un matching estable?

(ii) Suponga que todos los hombres consideran a Philippa la mejor alternativa. Demuestre que en cualquier matching estable ella tiene la misma pareja. Alternativamente, si Philippa es la peor alternativa para todos los hombres, ¿continua teniendo la misma pareja en todo matching estable?

(iii) Dado un matching estable entre n hombres y n mujeres en el cual nadie queda solo, ¿es posible encontrar tres parejas que si se redistribuyeran entre ellas los seis individuos mejorarían?

(iv) Suponga que todos los hombres tienen las mismas preferencias sobre el conjunto de mujeres. Demuestre que existe un único emparejamiento estable.

(v) En un modelo con n hombres y n mujeres, demuestre que el algoritmo de aceptación diferida termina en a lo más $(n-1)^2 + 1$ etapas. De un ejemplo donde efectivamente el algoritmo requiere de $(n-1)^2 + 1$ etapas para ser implementado.

Ejercicio 4

En el contexto de emparejamientos bilaterales uno-a-uno y preferencias estrictas, demuestre que existe un único emparejamiento estable si y solamente si el resultado de la implementación del algoritmo de aceptación diferida no depende del lado del mercado que haga las propuestas.

Ejercicio 5

En el contexto de problemas de Elección de Colegios, describa el mecanismo de Boston y demuestre que es inestable e incompatible con incentivos.

Ejercicio 6

Considere una situación donde $n \geq 3$ estudiantes postulan a tres universidades, las cuales tienen restricciones de capacidad $(q_1, q_2, q_3) \gg 0$ tales que $q_1 + q_2 + q_3 = n$. Cada estudiante tiene preferencias estrictas por las universidades y siempre prefiere entrar a alguna de ellas que quedarse fuera de la educación superior. Todas las universidades tienen las mismas preferencias por los estudiantes, las cuales son estrictas y se determinan a partir de los resultados de un test estandarizado. Los estudiantes son emparejados con las universidades siguiendo el mecanismo de aceptación diferida de Gale y Shapley en el cual ellos hacen las propuestas. Sin embargo, a diferencia del escenario clásico, una de las universidades solamente acepta a los estudiantes que la han posicionado en el primer lugar, prefiriendo quedarse con cupos vacíos a aceptar a aquellos que la posicionan en segundo o tercer lugar.

¿Sigue siendo el mecanismo de Gale y Shapley estable? ¿Sigue siendo compatible con incentivos por parte de los estudiantes? Demuestre o de un contra-ejemplo.

Ejercicio 7

Una universidad busca asignar oficinas a sus estudiantes de postgrado. Hay n estudiantes de postgrado y m oficinas, donde $0.5n + 1 < m < n$. Las oficinas son idénticas y en cada una de ellas pueden trabajar a lo más dos estudiantes. Cada estudiante tiene preferencias estrictas por su compañero(a) de oficina, las cuales están definidas en el conjunto $\{1, \ldots, n\}$, pudiendo así un estudiante preferir estar solo a compartir oficina con algunos de sus compañeros.

En este contexto un emparejamiento es dado por una función $\mu : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ tal que $\mu(\mu(k)) = k$ para todo $k \in \{1, \ldots, n\}$. Demuestre que, a diferencia de lo que ocurre en mercados *bilaterales* uno-a-uno, en este contexto no siempre existe un emparejamiento estable.

Ejercicio 8

Considere un *marriage market* con n hombres y n mujeres, donde todos los hombres tienen las mismas preferencias sobre el conjunto de las mujeres y las consideran a todas aceptables. Suponga que las mujeres se ordenan siguiendo las preferencias de los hombres, desde la mejor a la peor rankeada, y luego escogen pareja aplicando el algoritmo *serial dictatorship*. Demuestre que el emparejamiento alcanzado es estable en el mercado bilateral. ¿Puede haber otros emparejamientos estables?

Ejercicio 9

Considere el modelo de emparejamiento unilateral en el cual un número finito de individuos pueden intercambiar objetos indivisibles (por ejemplo, casas). Cada individuo posee un único objeto y tiene preferencias estrictas por los objetos en el mercado. En este contexto, encuentre un algoritmo que implemente asignaciones en el núcleo y sea compatible con incentivos.

Ejercicio 10

Considere un mercado habitacional con cuatro casas $\{h_1, h_2, h_3, h_4\}$ y cuatro individuos caraterizados por las siguientes preferencias estrictas sobre las casas:

$$h_3 \succ_1 h_4 \succ_1 h_1 \succ_1 h_2,$$

$$h_4 \succ_2 h_3 \succ_2 h_2 \succ_2 h_1,$$

$$h_2 \succ_3 h_1 \succ_3 h_3 \succ_3 h_4,$$

$$h_2 \succ_4 h_1 \succ_4 h_4 \succ_4 h_3.$$

Si ninguno de los individuos es originalmente propietario de una casa, encuentre el conjunto de distribuciones de casas que son Pareto eficientes.

Ejercicio 11

Un conjunto de no-propietarios $\{1, \dots, n\}$ tienen preferencias estrictas por n casas. Demuestre que en toda distribución Pareto eficiente algún individuo recibe la casa que a él más le gusta.

Ejercicio 12

Considere un mercado habitacional en el cual se quieren distribuir n casas entre n individuos. Cada individuo tiene preferencias estrictas por las casas y no existen propietarios. Sea $\mathcal{R}$ el conjunto de los ordenes de prioridad que se pueden determinar entre los n individuos. Esto es, $(r_1, \dots, r_n) \in \mathcal{R}$ si y solamente si existe $f : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ biyectiva tal que $f(i) = r_i, \forall i \in \{1, \dots, n\}$. Denote por $\mathrm{SD}(r)$ la distribución de casas que se obtiene al aplicar el algoritmo *serial dictatorship* siguiendo el orden de prioridad $r \in \mathcal{R}$. Demuestre que el conjunto de distribuciones de casas Pareto eficientes coincide con $\bigcup_{r \in \mathcal{R}} \mathrm{SD}(r)$.

Ejercicio 13

(i) Cuatro estudiantes $\{a, b, c, d\}$, los cuales entrarán el próximo semestre a la universidad, tienen las siguientes preferencias estrictas por habitaciones en un dormitorio universitario:

$$h_1 \succ_a h_2 \succ_a h_3 \succ_a h_4,$$
$$h_4 \succ_b h_2 \succ_b h_1 \succ_b h_3,$$
$$h_3 \succ_c h_1 \succ_c h_4 \succ_c h_2,$$
$$h_3 \succ_d h_2 \succ_d h_4 \succ_d h_1.$$

Encuentre las distribuciones de habitaciones que son Pareto eficientes.

(ii) Bajo las condiciones del ítem previo, suponga que cada estudiante estaba originalmente en una habitación: (a, h_3), (b, h_2), (c, h_1) y (d, h_4). Bajo las preferencias descritas en (i), encuentre las redistribuciones de habitaciones que están en el núcleo.

Ejercicio 14

Asumiendo preferencias estrictas, describa una forma de encontrar todas las distribuciones eficientes de casas en un mercado habitacional en el cual hay propietarios y entrantes. Además, de un ejemplo de su metodología en un mercado con tres casas, dos entrantes y un propietario.

Ejercicio 15

Considere un mercado habitacional con un conjunto $P = \{p_1, \ldots, p_6\}$ de propietarios y un conjunto $E = \{e_1, \ldots, e_7\}$ de entrantes. Denote por $C = \{c_1, \ldots, c_{13}\}$ al conjunto de casas y asuma que c_i es propiedad de p_i, con $i \in \{1, \ldots, 6\}$. Cada individuo $h \in P \cup E$ tiene preferencias estrictas $\succ_h$ por las casas en C. En este contexto, una *asignación habitacional* es caracterizada por una función $\mu : P \cup E \to C$ que asocia a cada individuo una casa diferente.

Diremos que una asignación habitacional μ es *óptima* si cumple las siguientes condiciones:

- *Pareto eficiencia:* no es posible redistribuir las casas sin perjudicar a alguien. Esto es, no existe una asignación habitacional η tal que $\eta \neq \mu$ y $\eta(h) \succeq_h \mu(h)$ para todo $h \in P \cup E$.[1]
- *Estabilidad a desvíos de propietarios:* no es posible que un conjunto de propietarios mejore su situación al retirarse del mercado para redistribuir sus casas. Esto es, no existe $Q \subseteq P$ no-vacío y $f : Q \to \{c_h : h \in Q\}$ inyectiva tal que $f(h) \succ_h \mu(h)$ para todo $h \in Q$.

Demuestre que siempre existe una asignación habitacional óptima.

Ejercicio 16

Considere una plataforma en la cual participan ocho pacientes, $\{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7, t_8\}$, los cuales necesitan un transplante de riñón. Los primeros seis pacientes entran a la plataforma acompañados de otra persona que está dispuesta a donar un riñón. Los pacientes tienen las siguientes preferencias

$\mathbf{t_1} : t_3 \succ t_4 \succ t_5 \succ c$	$\mathbf{t_5} : t_1 \succ t_3 \succ t_2 \succ t_4 \succ t_5 \succ t_6 \succ c$
$\mathbf{t_2} : t_4 \succ t_5 \succ t_3 \succ c$	$\mathbf{t_6} : t_4 \succ t_5 \succ t_3 \succ c$
$\mathbf{t_3} : t_4 \succ t_5 \succ t_2 \succ t_1 \succ t_3 \succ c$	$\mathbf{t_7} : t_1 \succ t_2 \succ t_3 \succ t_4 \succ t_5 \succ c$
$\mathbf{t_4} : t_3 \succ t_5 \succ t_1 \succ t_2 \succ c$	$\mathbf{t_8} : t_2 \succ t_3 \succ t_1 \succ t_4 \succ t_5 \succ c$

donde c denota la opción de ir a la lista de espera. Así, por ejemplo, el paciente t_6 prefiere recibir un riñón del donante que acompaña al paciente t_5 que del donante que acompaña al paciente t_3.

En este contexto, encuentre el emparejamiento que se obtiene al implementar el mecanismo TTCC (*Top Trading Cycles and Chains*) considerando la siguiente *regla de selección de cadenas*:

(i) Se da prioridad a las cadenas de mayor tamaño.

(ii) Entre cadenas del mismo tamaño, se da prioridad a la que empieza con el paciente de menor número.

(iii) Si el primer paciente de una cadena implementada venía acompañado de un potencial donante, este último se mantiene disponible en la plataforma.

[1] Note que, como las preferencias son estrictas, esta es la definición usual de Pareto eficiencia. Además, como es costumbre en este contexto, $\eta(h) \succeq_h \mu(h)$ significa que $\eta(h) \succ_h \mu(h)$ ó $\eta(h) = \mu(h)$.