Introducción a la Teoría de Emparejamientos

Asignación de Objetos Indivisibles sin Transferencias

Juan Pablo Torres-Martínez
Departamento de Economía, Universidad de Chile

Emparejamientos Unilaterales sin Transferencias

La teoría de emparejamientos unilaterales se enfoca en la asignación de bienes indivisibles entre individuos. En este contexto, un emparejamiento es una función que asigna objetos a los agentes.

Estudiaremos tres modelos de emparejamiento unilateral en los cuales se asignan objetos—a lo más uno a cada agente—sin implementar transferencias:

- El mercado habitacional de Shapley y Scarf (JME, 1974).
- El problema de asignación habitacional de Svensson (SChW, 1994).
- El problema de asignación habitacional de Addulkadiroglu y Sonmez (JET, 1999).

Mercado Habitacional - Shapley y Scarf (1974)

Considere un mercado con un número finito de individuos, N, cada uno de los cuales es propietario de una y solo una casa.

Asumiremos que cada individuo tiene preferencias completas, transitivas y estrictas sobre el conjunto de casas.

En este contexto, un emparejamiento es cualquier función biyectiva $\mu : \{1, \ldots, N\} \rightarrow \{1, \ldots, N\}$ que asocia a cada individuo h la casa del individuo $\mu(h)$.

Un emparejamiento está en el **núcleo** si asigna las casas de tal forma que ningún grupo de individuos tiene incentivos para abandonar el mercado y distribuirse de otra forma sus propiedades.

Queremos determinar condiciones para que existan emparejamientos en el núcleo y determinar algoritmos que nos permitan encontrarlos.

Mercado Habitacional - Shapley y Scarf (1974)

Un **ciclo** $(m_{i_1}, \ldots, m_{i_k})$ es una lista ordenada de agentes tal que m_{i_1} anuncia a m_{i_2}, quien anuncia a m_{i_3} y así sucesivamente hasta que m_{i_k} anuncia a m_{i_1}.

Considere el mecanismo Top Trading Cycles (TTC):

Etapa 1. Cada agente anuncia al propietario de la casa que el prefiere, pudiendo ser el mismo. Para cada ciclo, los agentes son asignados a la casa del individuo que anunciaron.

Etapa k>1. Cada agente que no obtuvo una casa en las etapas previas anuncia al propietario de la casa que el prefiere entre aquellas que aún están disponibles. Para cada ciclo, los agentes son asignados a la casa del individuo que anunciaron.

El algoritmo termina cuando todos los individuos están emparejados.

Mercado Habitacional - Shapley y Scarf (1974)

Teorema (Shapley y Scarf (1974), Roth y Postlewaite (1977), Roth (1982))

El mecanismo TTC implementa el único emparejamiento en el núcleo del mercado habitacional. Además, se trata de un mecanismo strategy proof y su resultado puede ser descentralizado como la única asignación de casas de un mercado competitivo.

Problemas de Asignación Habitacional

Consideremos el modelo de Svensson (1994), en el cual no hay propietarios y a cada individuo se le adjudica a lo más una casa.

Por simplicidad, asumiremos que el conjunto de individuos y el conjunto de casas tienen el mismo número de elementos.

En este contexto, el siguiente mecanismo es Pareto eficiente y *strategy proof*:

Serial dictatorship (SD)

- Los individuos son ordenados siguiendo algún criterio.
- En base al ordenamiento determinado, se adjudican las casas de tal forma que cada agente recibe su mejor opción entre las que están disponibles.

Note que, como inicialmente los individuos no son propietarios de las casas, los conceptos de núcleo y racionalidad individual dejan de ser relevantes.

Problemas de Asignación Habitacional

Consideremos ahora el contexto estudiado por Addulkadiroglu y Sonmez (1999).

Hay un conjunto de propietarios, un conjunto de entrantes, un conjunto de casas ocupadas, un conjunto de casas vacias y preferencias estrictas de cada agente por las casas.

Por simplicidad, asumiremos que el conjunto de entrantes y el conjunto de casas vacías tienen el mismo número de elementos.

Cuando no hay entrantes, obtenemos el modelo de Shapley y Scarf (1974) y el algoritmo TTC implementa un emparejamiento en el núcleo que es compatible con incentivos.

Cuando no hay propietarios, obtenemos el modelo de Svensson (1994) y el algoritmo SD implementa un emparejamiento Pareto eficiente y compatible con incentivos.

Problemas de Asignación Habitacional

Por lo tanto, hay dos mecanismos que podrían parecer naturales y que en principio protegerían a quienes ya tienen una casa, pues les permitiría no participar caso quieran mantener su propiedad:

(1) Entre los individuos que quieran participar, determinar una distribución inicial sobre las casas (sin necesidad de respetar los derechos de propiedad iniciales) y luego aplicar el algoritmo TTC.

(2) Entre los individuos que quieran participar, determinar un orden y aplicar el algoritmo SD (sin respetar los derechos de propiedad iniciales).

La posibilidad de quedar en una situación peor a la inicial, puede desincentivar a los propietarios a participar en este tipo de mecanismos.

Esto puede inducir ineficiencias, asociadas a la reducción del intercambio.

Problemas de Asignación Habitacional

La clave de las potenciales ineficiencias está en que en el primero de los mecanismos la (re)distribución inicial de las casas entre aquellos que quieran participar es determinada de forma aleatoria.

Análogamente, en el segundo mecanismo, el orden de los individuos que deseen entrar al mercado se determina de forma estocástica.

Esto es, los dos mecanismos propuestos asocian a cada problema de asignación habitacional una *loteria*, i.e., una distribución de probabilidad sobre el conjunto de emparejamientos.

Evidentemente, sería ideal que cada uno de estos mecanismos fuera:

Ex-post Pareto Eficiente, en el sentido que da probabilidad positiva solamente a emparejamientos Pareto eficientes.

Ex-post Individualmente Racional, en el sentido que da probabilidad positiva solamente a emparejamientos donde los propietarios reciben una casa tan buena cuanto la que tenían.

Problemas de Asignación Habitacional

Se puede probar que ambos mecanismos llevan al mismo resultado.

Por eso, nos concentraremos en el análisis de los emparejamientos que se obtienen aplicando SD, luego de consultar a los propietarios si quieren participar y de determinar (aleatoriamente) un orden entre los individuos que quedan.

Random serial dictatorship (RSD)

- Cada propietario decide si entra en el sorteo o mantiene su propiedad.
- Todos los que deciden entrar al sorteo reportan sus preferencias.
- De forma aleatoria, siguiendo alguna distribución prefijada, se sortea un orden para los individuos involucrados en el sorteo.
- Siguiendo el orden sorteado se adjudican las casas de tal forma que cada agente recibe su mejor opción entre las que están disponibles.

Aunque es utilizado para asignar estudiantes a dormitorios universitarios, este mecanismo no es ex-post Pareto eficiente ni ex-post individualmente racional.

Problemas de Asignación Habitacional

Ejemplo

Suponga que hay tres individuos i_1, i_2, i_3 y tres casas h_1, h_2, h_3.

El agente i_1 es el propietario de la casa h_1.

Los agentes i_2 e i_3 son entrantes y las casas h_2 y h_3 están vacías.

Las preferencias sobre las casas (h_1, h_2, h_3) son representables por los siguientes niveles de utilidad:

$$i_1 : (3, 4, 1); \qquad i_2 : (4, 3, 1); \qquad i_3 : (3, 4, 1).$$

Entonces, i_1 puede quedarse con su propiedad o entrar al mecanismo RSD y sujetarse al resultado del sorteo, el cual asumiremos que determinará un orden de prioridad a través de una distribución uniforme.

Por lo tanto, si i_1 evalua el resultado del sorteo a través de la utilidad esperada asociada, le convendrá mantener su casa si esas ganancias esperadas son menores que $u^{i_1}(h_1) = 3$.

Problemas de Asignación Habitacional

Ejemplo (continuación)

La siguiente tabla muestra los resultados de la asignación de casas para a las diferentes realizaciones de rankings de prioridad:

Orden sorteado	i_1	i_2	i_3
i_1, i_2, i_3	h_2	h_1	h_3
i_1, i_3, i_2	h_2	h_3	h_1
i_2, i_1, i_3	h_2	h_1	h_3
i_2, i_3, i_1	h_3	h_1	h_2
i_3, i_1, i_2	h_1	h_3	h_2
i_3, i_2, i_1	h_3	h_2	h_1

Así, la utilidad esperada del individuo i_1 al entrar al sorteo viene dada por:

$$\frac{1}{6}u^{i_1}(h_1) + \frac{3}{6}u^{i_1}(h_2) + \frac{2}{6}u^{i_1}(h_3) = \frac{17}{6}.$$

Estrategia óptima de i_1: no entrar al sorteo.

Problemas de Asignación Habitacional

Ejemplo (continuación)

Luego que i_1 decide mantener su casa, i_2 e i_3 van al sorteo.

Como ambos prefieren h_2 a h_3, existen dos posibles asignaciones finales de agentes-casas, ambas equiprobables:

$$[(i_1, h_1), (i_2, h_2), (i_3, h_3)], \qquad [(i_1, h_1), (i_2, h_3), (i_3, h_2)].$$

La primera asignación es Pareto dominada por $[(i_1, h_2), (i_2, h_1), (i_3, h_3)]$.

Problemas de Asignación Habitacional

El siguiente mecanismo fue propuesto por Abdulkadiroglu y Sonmez (1999):

You request my house—I get your turn (YRMH-IGYT)

• Todos los individuos reportan sus preferencias. Siguiendo alguna distribución prefijada, se sortea un orden para los individuos.

• Siguiendo el orden sorteado se adjudican las casas de tal forma que cada agente recibe su mejor opción entre las que están disponibles, a menos que solicite una casa ocupada.

• Si al propietario original de esa casa ya se le adjudicó otra, se continua con la asignación. Caso contrario, el propietario obtiene prioridad por sobre el solicitante y se continua con el algoritmo.

• Si aparece un ciclo, se le asignan las casas a los agentes involucrados y se continua.

Al respetar los derechos de propiedad sin inhibir el intercambio, el mecanismo YRMH-IGYT consigue implementar de forma *strategy-proof* emparejamientos que son ex-post Pareto eficientes, ex-post individualmente racionales y estables a desvíos de grupos de propietarios.

Problemas de Asignación Habitacional

Ejemplo

Considere una situación donde $\{m_1, m_2, m_3, m_4\}$ es el conjunto de propietarios, $\{m_5, m_6, m_7\}$ el conjunto de entrantes, $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ las casas ocupadas y $\{w_5, w_6, w_7\}$ las propiedades vacias.

Las preferencias individuales vienen dadas por:

P^{m_1}	P^{m_2}	P^{m_3}	P^{m_4}	P^{m_5}	P^{m_6}	P^{m_7}
w_1	w_4	w_7	w_7	w_6	w_3	w_4
w_2	w_5	w_3	w_6	w_1	w_2	w_7
w_3	w_2	w_2	w_4	w_3	w_7	w_6
w_4	w_1	w_5	w_1	w_2	w_1	w_3
w_5	w_3	w_4	w_3	w_5	w_6	w_1
w_6	w_6	w_1	w_2	w_4	w_4	w_5
w_7	w_7	w_6	w_5	w_7	w_5	w_2

Si se ha sorteado el siguiente orden de prioridad para la adjudicación de casas $\{m_3, m_7, m_2, m_5, m_6, m_4, m_1\}$, encuentre el emparejamiento implementado por el mecanismo YRMH-IGYT.