

# Introducción a la Teoría de Emparejamientos

## *Implementación Eficiente de Transplantes de Riñón*

**Juan Pablo Torres-Martínez**

Departamento de Economía, Universidad de Chile

# Trasplantes de Riñón

El trasplante de riñón suele ser la mejor alternativa disponible para pacientes con insuficiencia renal avanzada que están sujetos a diálisis periódicas.

Estos pacientes pueden recibir un órgano de un donante cadavérico, en cuyo caso deben entrar a una lista de espera.

En Chile, un paciente también puede recibir un riñón de su cónyuge, de un donante vivo con lazos de consanguinidad hasta cuarto grado, o de otra persona dentro de una "donación cruzada".

El potencial donante debe superar tests de compatibilidad: mayor de edad, buena salud, tipo sanguíneo, bajo nivel de anticuerpos.

En Estados Unidos, no se requiere que el donante vivo sea un familiar, ni se restringen los trasplantes a donaciones cruzadas. Esto abre la posibilidad de implementar mejoras de eficiencia en la asignación de los órganos.

Roth, Sonmez y Unver (2004) propusieron un mecanismo de emparejamiento, [Top Trading Cycles and Chains \(TTCC\)](#), que permite la reasignación de órganos de forma eficiente y *strategy-proof*.

# Trasplantes de Riñón

Consideraremos una situación en la cual puede haber pacientes que están solos, donadores altruistas y pares paciente-donador.

Asumiremos que solo los pacientes tienen preferencias, las cuales están definidas sobre el conjunto de potenciales donantes y son completas, transitivas y estrictas.

Por lo tanto, los donantes—altruistas o acompañantes de un paciente—son indiferentes sobre la identidad del beneficiario.

[H]: Todos los pares paciente-donador son compatibles y hay suficientes donantes altruistas para implementar los trasplantes requeridos por los pacientes que están solos.

Si se cumple [H] y no hay pacientes que están solos, el problema de *trasplantes de riñón* es análogo a un modelo habitacional de [Shapley y Scarf \(1974\)](#).

En este contexto, el mecanismo TTC es *strategy-proof* e implementa una asignación Pareto eficiente, individualmente racional y estable a desvíos de grupos de pares paciente-donador.

# Trasplantes de Riñón

En general, si se cumple [H], el problema de *trasplantes de riñón* es análogo al modelo de asignación habitacional de [Abdulkadiroglu y Sonmez \(1999\)](#).

En este escenario, el mecanismo YRMH-IGYT es *strategy-proof* e implementa una distribución de pacientes y donantes que es *ex-post* Pareto eficiente, individualmente racional y estable a desvíos de grupos de pares paciente-donador.

Evidentemente, la hipótesis [H] es muy restrictiva.

Cuando [H] no se cumple, un paciente puede no tener donantes compatibles (o quedarse sin donantes compatibles durante la implementación de algoritmos como TTC ó YRMH-IGYT).

Aunque todo paciente puede inscribirse en la *lista de espera* por donantes cadavéricos, esto no es equiparable a recibir un trasplante de un donante vivo.

Efectivamente, al entrar a la *lista de espera* se definen prioridades y existe incertidumbre sobre los plazos y las compatibilidades. *Esto es, la lista de espera es una lotería sobre potenciales trasplantes.*

# Plataformas de Trasplantes de Riñón

- Modelaremos a los donantes altruistas como pares pacientes-donador donde el paciente es **virtual** y tiene preferencias que ponen como primera opción ir a la lista de espera.
- Modelaremos a los pacientes que están solos como pares paciente-donador cuyo "donador" no es del interés de nadie.

Por lo tanto, sin pérdida de generalidad, podemos pensar que solo hay pares paciente-donador en la plataforma de trasplantes.

En este contexto, una **cadena** es una lista ordenada de pacientes  $(m_{i_1}, \dots, m_{i_k})$  cada uno anunciando al siguiente paciente de la lista, excepto el paciente  $m_{i_k}$  que pide para entrar en la lista de espera.

# Mecanismo TTCC

## Top Trading Cycles and Chains (TTCC)

(1) Cada paciente anuncia al paciente del par paciente-donador cuyo donador él prefiere. Puede anunciarse a sí mismo o solicitar el ingreso a la lista de espera.

Luego de esta etapa, siempre se forma un ciclo, una cadena o ambos.

(2.1) Si hay ciclos, se implementan los intercambios de órganos entre los pacientes de cada ciclo. Luego, cada paciente que queda en la plataforma anuncia al paciente del par paciente-donador cuyo donador él prefiere y que aún está disponible. Puede anunciarse a sí mismo o solicitar el ingreso a la lista de espera. Si hay ciclos, se implementa el intercambio y se repite el proceso hasta que no aparecen más ciclos.

(2.2) Si no hay ciclos y aún quedan pares paciente-donador, entonces cada paciente está en una cadena. Utilizando una [regla de selección de cadenas](#), se selecciona una de las cadenas existentes y se implementan las donaciones asociadas, incluyendo el ingreso del último paciente de la cadena a la lista de espera.

## Top Trading Cycles and Chains TTCC (continuación)

La **regla de selección de cadenas** determinará si el órgano del donante asociado al primer paciente de la cadena va directo a la lista de espera o continua en el algoritmo. Si se opta por mantener el órgano en el algoritmo, la cadena se mantiene de forma **virtual** en la plataforma, para permitir que otros pacientes apuntes al origen de ella para recibir un trasplante.

(3) Luego de la eliminación de una cadena se pueden formar nuevos ciclos. En ese caso, se repiten las etapas (2.1) y (2.2) hasta que no queden pacientes.

# Trasplantes de Riñón

## Teorema 1 - Roth, Sonmez y Unver (2004)

El intercambio implementado por el mecanismo TTCC es Pareto eficiente si, en cada etapa no-terminal del algoritmo, toda cadena que se implementa se mantiene de forma virtual en la plataforma.

## Teorema 2 - Roth, Sonmez y Unver (2004)

Existen varias reglas de selección de cadenas bajo las cuales el mecanismo TTCC es *strategy-proof* (ver detalles en el paper).

Por ejemplo, TTCC es Pareto eficiente y strategy-proof cuando se considera la siguiente regla de selección de cadenas:

*Utilizando un criterio para priorizar a los pacientes, se escoge la cadena que empiece con el paciente de mayor prioridad.*

*Luego de implementar una cadena, esta se mantiene de forma virtual en la plataforma.*

## Ejemplo

Considere un conjunto de 12 pares de paciente-donador con las siguientes preferencias:

$t_1 : t_9, t_{10}, t_1$

$t_2 : t_{11}, t_3, t_5, t_6, t_2$

$t_3 : t_2, t_4, t_5, t_6, t_7, t_8, c$

$t_4 : t_5, t_9, t_1, t_8, t_{10}, t_3, c$

$t_5 : t_3, t_7, t_{11}, t_4, t_5$

$t_6 : t_3, t_5, t_8, t_6$

$t_7 : t_6, t_1, t_3, t_9, t_{10}, t_1, c$

$t_8 : t_6, t_4, t_{11}, t_2, t_3, t_8$

$t_9 : t_3, t_{11}, c$

$t_{10} : t_{11}, t_1, t_4, t_5, t_6, t_7, c$

$t_{11} : t_3, t_6, t_5, t_{11}$

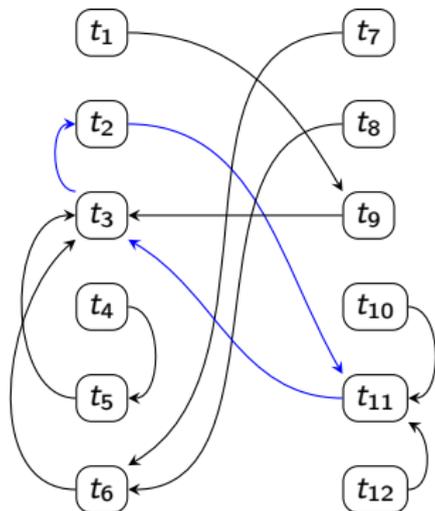
$t_{12} : t_{11}, t_3, t_9, t_8, t_{10}, t_{12}$

donde  $c$  indica la opción de ir a la lista de espera.

Encuentre el emparejamiento implementado por el mecanismo TTCC considerando la siguiente *regla de selección de cadenas*:

- (i) Dar prioridad a la cadena que comienza por el paciente de menor número.
- (iii) Mantener de forma virtual en la plataforma las cadenas implementadas.

## Ejemplo (continuación)



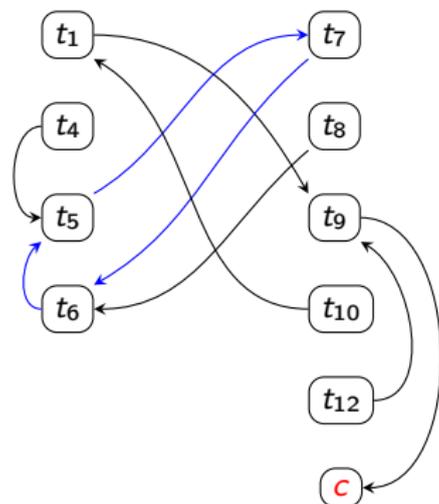
En la primera etapa se forma un ciclo entre  $t_2$ ,  $t_{11}$  y  $t_3$ .

Se implementa el ciclo:

- $t_2$  recibe un riñón del acompañante de  $t_{11}$ .
- $t_{11}$  recibe un riñón del acompañante de  $t_3$ .
- $t_3$  recibe un riñón del acompañante de  $t_2$ .

Las seis personas involucradas en los trasplantes salen de la plataforma y se pasa a la siguiente etapa.

## Ejemplo (continuación)



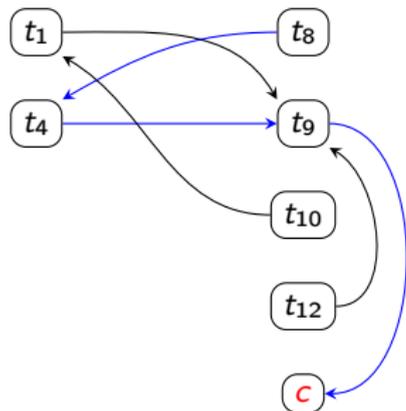
En la segunda etapa se forma un ciclo entre  $t_5$ ,  $t_7$  y  $t_6$ .

Se implementa el ciclo:

- $t_5$  recibe un riñón del acompañante de  $t_7$ .
- $t_7$  recibe un riñón del acompañante de  $t_6$ .
- $t_6$  recibe un riñón del acompañante de  $t_5$ .

Las seis personas involucradas en los trasplantes salen de la plataforma y se pasa a la siguiente etapa.

## Ejemplo (continuación)



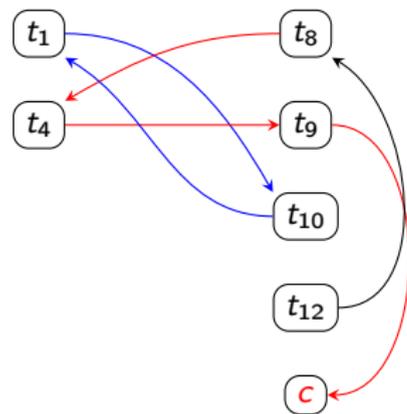
En la tercera etapa de TTCC se forman varias cadenas.

Así, aplicando el *criterio de selección de cadenas*, tenemos que:

- $t_8$  recibe un riñón del acompañante de  $t_4$ .
- $t_4$  recibe un riñón del acompañante de  $t_9$ .

Las cuatro personas involucradas en los trasplantes salen de la plataforma,  $t_9$  va a la lista de espera y la cadena se mantiene de forma **virtual** en la plataforma.

## Ejemplo (continuación)



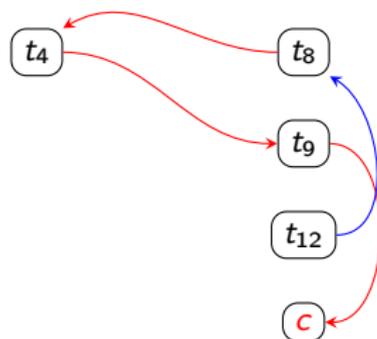
En la cuarta etapa de TTCC se genera un ciclo entre  $t_1$  y  $t_{10}$ .

Por lo tanto,

- $t_1$  recibe un riñón del acompañante de  $t_{10}$ .
- $t_{10}$  recibe un riñón del acompañante de  $t_1$ .

Las cuatro personas involucradas en los trasplantes salen de la plataforma.

## Ejemplo (continuación)



En la quinta etapa de TTCC se genera una cadena a partir de la incorporación de  $t_{12}$  a la cadena que quedó de forma virtual en la plataforma.

Por lo tanto,

- $t_{12}$  recibe un riñón del acompañante de  $t_8$ .

Ambas personas salen de la plataforma y el donante que acompaña a  $t_{12}$  se pone a disposición de quienes están en la lista de espera.

## Ejemplo (continuación)

Por lo tanto, la asignación final de pacientes-donadores es

$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	$t_5$	$t_6$	$t_7$	$t_8$	$t_9$	$t_{10}$	$t_{11}$	$t_{12}$
$k_{10}$	$k_{11}$	$k_2$	$k_9$	$k_7$	$k_5$	$k_6$	$k_4$	$c$	$k_1$	$k_3$	$k_8$

donde  $k_i$  denota al donante que acompañaba al paciente  $t_i$  y  $c$  denota la la opción de incorporarse a la lista de espera.

La regla de selección de cadenas utilizada en este ejemplo nos asegura que el mecanismo es *strategy-proof*.

Además, el resultado es eficiente, pues hemos supuesto que los donantes que acompañan a aquellos pacientes que están al inicio de una cadena implementada se mantienen en la plataforma hasta el final.